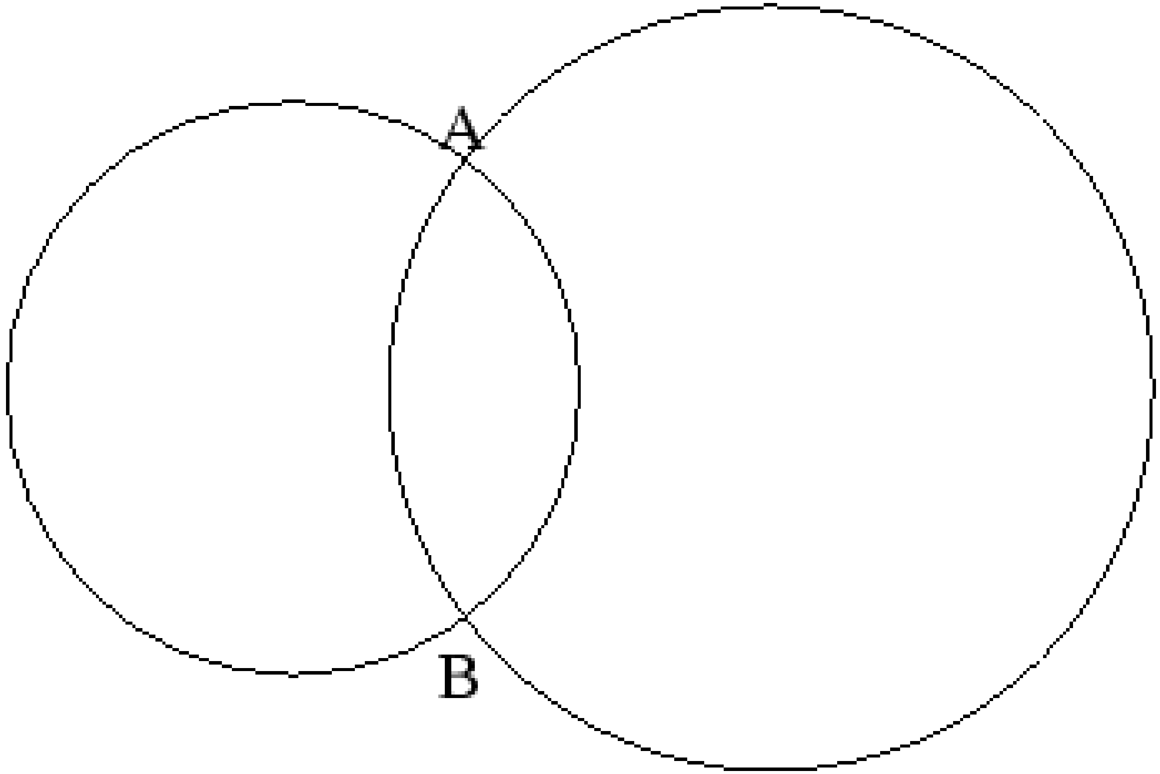
微分：遞增、遞減函數的應用

例：兩圓相交決定弧長 (1/4)

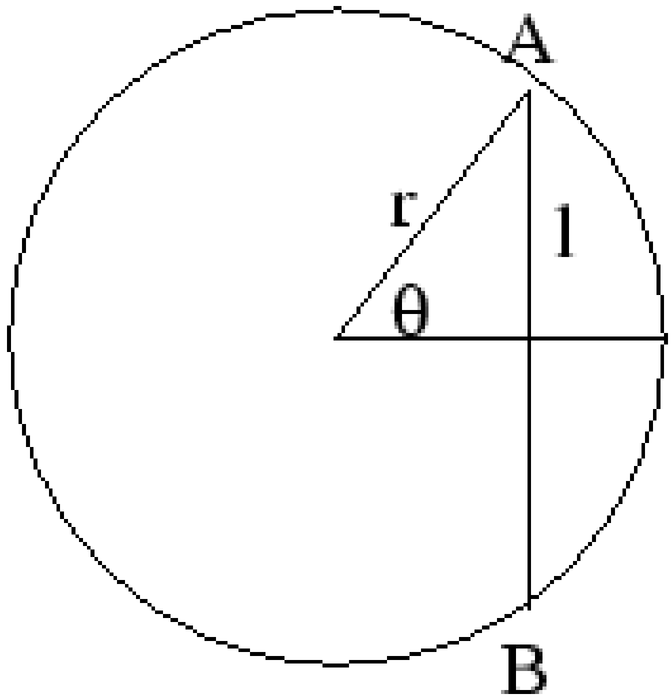
平面上大小兩個圓相交於A、B兩點，對於A、B在兩個圓上所決定的弧而言，小圓上的弧長大於大圓上的弧長，為什麼？



http://www.math.ntu.edu.tw/~calculus/question_15.php

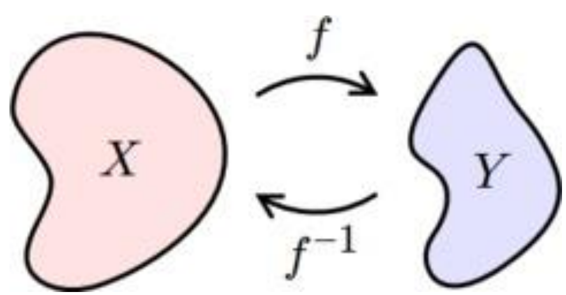
例：兩圓相交決定弧長 (2/4)

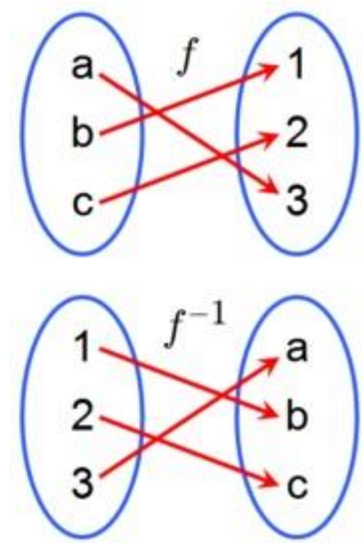
一固定長$2l$，對任何半徑$r \geq l$的圓皆可在圓內找到長為$2l$的弦，此弦對應的弧長 $f(r) = 2r\theta = 2r \cdot \sin^{-1}(\frac{l}{r})$，若可驗證$f(r)$為$r$的遞減函數，則原題得解



$$\boxed{\begin{aligned} &\sin\theta = \tfrac{l}{r} \\ &\therefore \theta = \sin^{-1}(\tfrac{l}{r}) \end{aligned}}$$

$\sin^{-1}$在此代表sin的反函數(inverse function)符號記為arcsin較不易混淆





例：兩圓相交決定弧長 (3/4)

一固定長$2l$，對任何半徑$r \geq l$的圓皆可在圓內找到長為$2l$的弦，此弦對應的弧長 $f(r) = 2r\theta = 2r \cdot \sin^{-1}(\frac{l}{r})$，若可驗證$f(r)$為$r$的遞減函數，則原題得解

$$\because\ f'(r) = 2\sin^{-1}(\tfrac{l}{r}) - \frac{2l}{\sqrt{r^2 - l^2}}$$

$$f''(r) = \frac{2l}{\sqrt{1-(\frac{l}{r})^2}}\left(\frac{1}{r^2 - l^2} - \frac{1}{r^2}\right) \geq 0$$

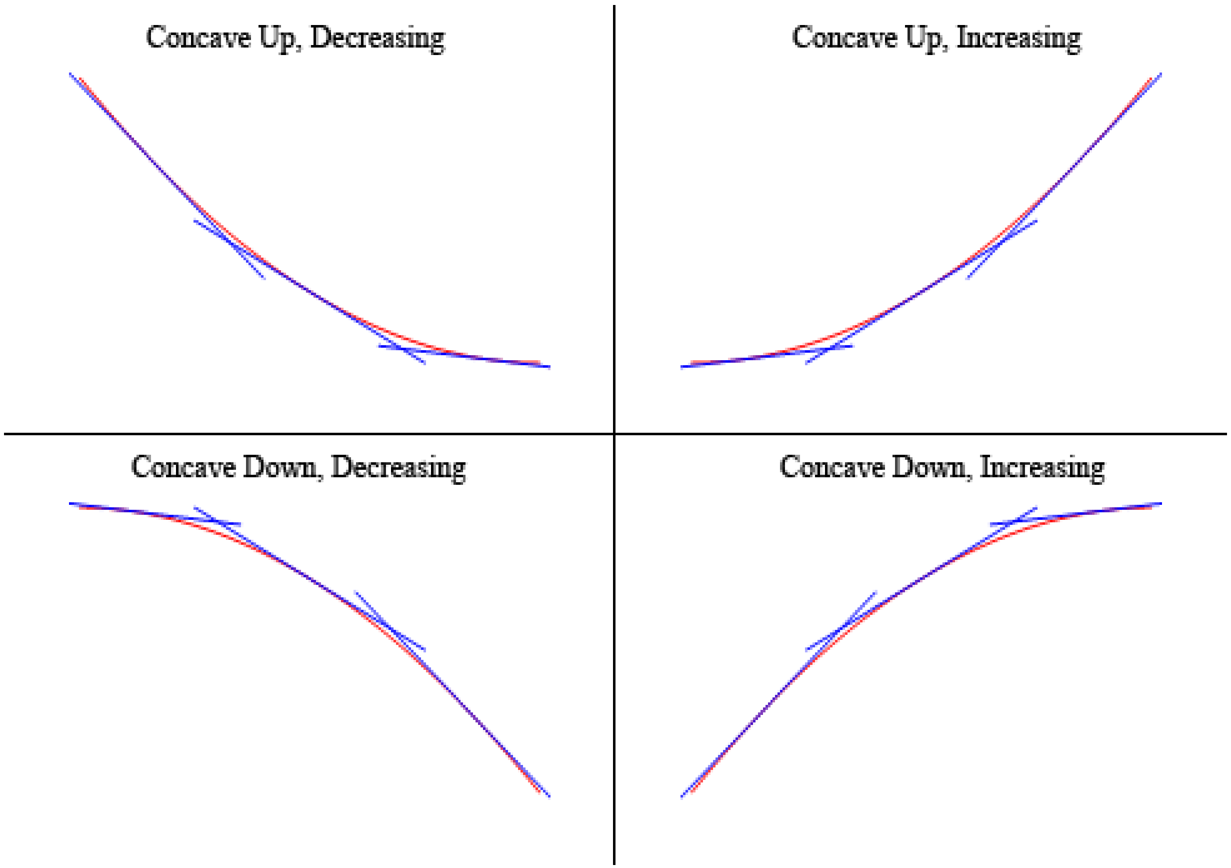
故 $f'(r)$ 在$r > l$時為遞增函數，又 $\lim_{r \to \infty} f'(r) = 0$

$\therefore\ f'(r) < 0 \quad \forall r > l$　因此$f(r)$在$r > l$時，為遞減函數

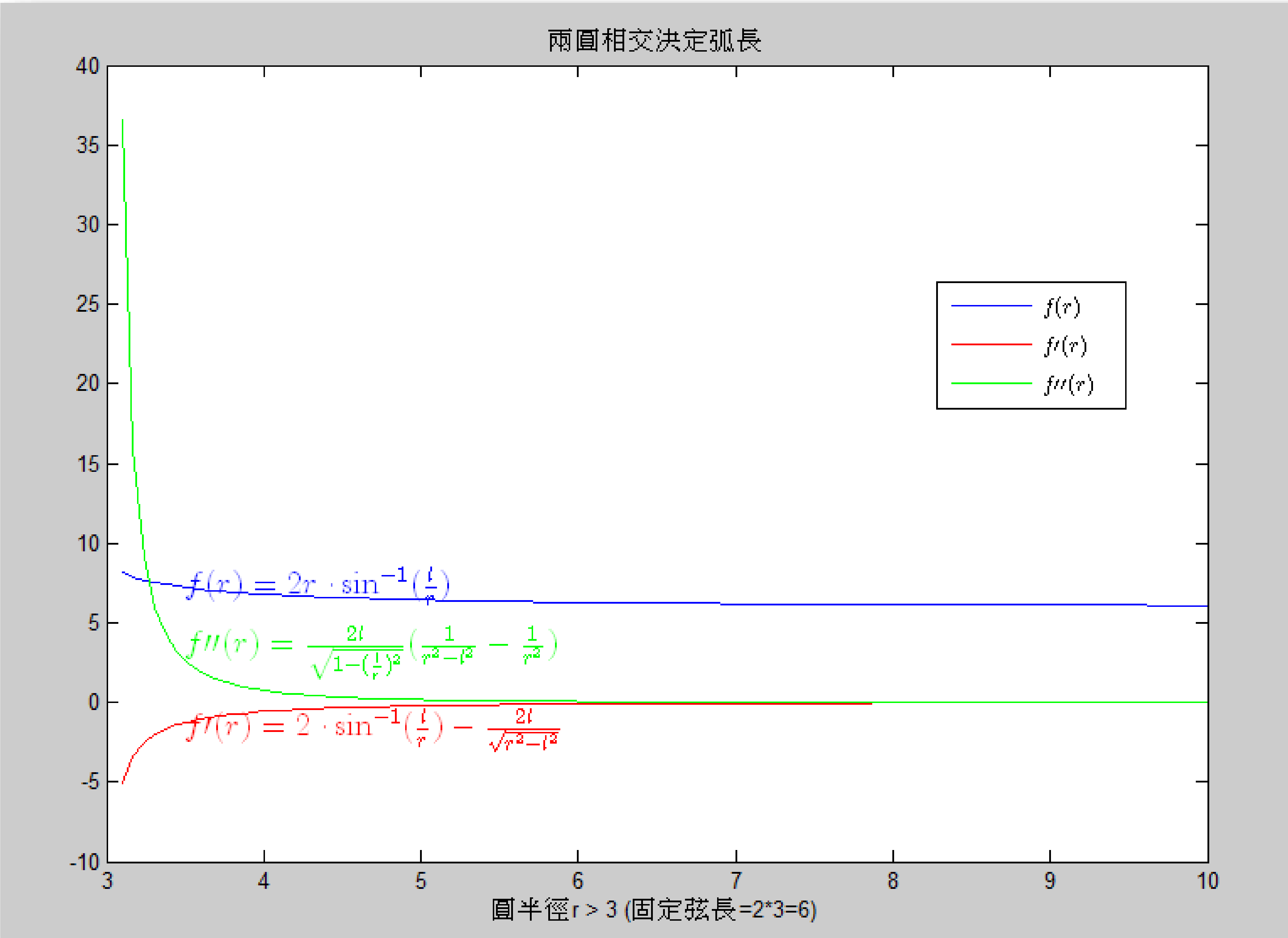
例：兩圓相交決定弧長 (4/4)

故 $f'(r)$ 在 $r > l$ 時為遞增函數，又 $\lim_{r\to\infty} f'(r) = 0$

$\therefore f'(r) < 0 \quad \forall r > l$ 因此 $f(r)$ 在 $r > l$ 時，為遞減函數



紀老師以MATLAB繪製所得的結果



改以自行開發的繪圖程式呈現運算結果，多方驗證